

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

**КОЛЕБАНИЯ ПОВРЕЖДЕННОЙ ПОПЕРЕЧНО  
ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ,  
КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДОЙ****Р.А.ИСКЕНДЕРОВ***Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет  
r.iskanderov@gmail.com*

*Рассмотрены свободные колебания подкрепленной поперечными ребрами поврежденной цилиндрической панели, заполненной вязко-упругой средой. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона получены дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для ребристой поврежденной цилиндрической панели. Показано, что собственные частоты колебаний возрастают с увеличением количества поперечных ребер. Учет вязкости материала среды приводит к снижению значения собственной частоты колебаний рассмотренной системы по сравнению с частотой той же системы, когда среда чисто упругая.*

**Ключевые слова:** поврежденная оболочка, критическая нагрузка, колебания, вязко-упругая среда, устойчивость, модель Пастернака.

Для уточнения рабочего ресурса конструкций необходимо учесть особенности свойств материалов, накопления и развития в объеме материала различного рода дефектов, а также связей, налагаемых на конструкции и их элементы со стороны внешней контактной среды. Решение такого типа задач представляет математическую трудность, которая углубляется как с учетом динамических эффектов и учетом повреждаемости, так и с учетом воздействия окружающей среды. Поэтому требуется разработка приближенного метода. Одним из таких методов является вариационный, применение которого объясняется тем, что он позволяет получить непротиворечивые приближенные теории тонкостенных конструкций типа оболочек и стержней. В работах [1,2,7] исследованы влияния начального прогиба ребристой оболочки, заполненной средой, на критические напряжения общей потери устойчивости.

В данной работе исследованы свободные колебания подкрепленной кольцевыми ребрами поврежденной цилиндрической панели, контактирующей с вязко-упругой средой.

Для учета повреждаемости применяется деформационная наследственная теория повреждаемости, разработанная для одномерного случая в [3] и развитая для сложно – напряженного состояния в [4, 5, 6]. Согласно этой теории определяющие уравнения для неоднородного тела ( $\bar{x}$ -вектор-координата точки тела) записываются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{ij} + K^* \cdot \sigma_{ij} + M^* \cdot \sigma_{ij} ,$$

где  $E$  - модуль Юнга, а  $K^*$  и  $M^*$  -интегральные операторы наследственного типа, описывающие, соответственно, процессы обратимой ползучести и повреждаемости, и для которых имеют место представления:

$$K^* \cdot \sigma_{ij} = \int_0^t K(\bar{x}, t - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau ,$$

$$M^* \cdot \sigma_{ij} = \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau .$$

Здесь  $K(\bar{x}, t - \tau)$  и  $M(\bar{x}, t - \tau)$  -соответственно, ядра обратимой ползучести и повреждаемости;  $(t_k^-; t_k^+)$ -интервалы периодов активного напряжения, способствующего росту повреждаемости;  $f(t_k^+)$ -функция залечивания дефектов, зависящая от объема повреждаемости, накопленной за данный цикл. Например, значение  $f(t_k^+) = 0$  соответствует полному залечиванию дефектов, образовавшихся за данный цикл, а значения  $f(t_k^+) = 1$  - отсутствию самого эффекта залечивания дефектов. Все промежуточные значения от нуля до единицы соответствуют эффекту частичной залечиваемости дефектов. Для определения интервалов  $(t_k^-; t_k^+)$  необходимо задавать специальные условия. Их удобно сформулировать для конкретной задачи с учетом специфики конструкции, условия ее работы.

Для решения поставленной задачи применяется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. Принимается, что напряженно-деформированное состояние цилиндрической панели можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности панели. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края панели, лежат в одной координатной плоскости.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений  $u_j, \vartheta_j, w_j$   $j$ -го поперечного стержня, необходимо определить также

углы закручивания  $\varphi_{kpi}$ . Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеют место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с цилиндрической панели равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); \mathcal{G}_j(x) = \mathcal{G}(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \varphi_{kpi}(x) = \varphi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $h_j = 0,5h + H_j^1$ ,  $h$  – толщина панели,  $H_j^1$  – расстояния от осей  $j$  – го поперечного стержня до поверхности панели,  $\varphi_j, \varphi_{kpi}$  – углы поворота и закручивания поперечных сечений, соответственно, поперечных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую панель поверхностные нагрузки могут быть сведены к составляющим  $q_x, q_y$  и  $q_z$ , приложенным к срединной поверхности панели, а краевые нагрузки – к продольным, касательным, поперечным усилиям и изгибающим моментам, приложенным к краям цилиндрических панелей.

Для применения принципа Остроградского-Гамильтона предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Потенциальная энергия упругой деформации поврежденной цилиндрической панели имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) + N_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right) - M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\ &- 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_x \left( \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_x d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_x d\tau \right) + \\ &+ N_y \left( \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_y d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_y d\tau \right) + \\ &+ N_{xy} \left( \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{xy} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{xy} d\tau \right) - \\ &\left. - M_x \left( \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_x d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_x d\tau \right) - \right. \end{aligned} \quad (2)$$

$$-M_y \left( \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_y d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_y d\tau \right) -$$

$$-M_{xy} \left( \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{xy} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{xy} d\tau \right) \Bigg\} dx dy.$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации  $j$ -го поперечного ребра таковы [5, 6]:

$$\begin{aligned} \Pi_j = \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ E_j F_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + E_j J_{xj} \left( \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + E_j J_{zj} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R} \right)^2 + G_j J_{kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \end{aligned} \quad (3)$$

В выражениях (1)-(3)  $x_1, x_2, y_1, y_2$  – координаты криволинейных и прямолинейных краев панели;  $F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{kpi}$  – площадь и моменты инерции поперечного сечения  $j$ -го поперечного стержня, соответственно, относительно оси  $Oz$  и оси, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении;  $E_j, G_j$  – модули упругости и сдвига материала  $j$ -го поперечного стержня, соответственно.

Потенциальная энергия внешних поверхностных и краевых нагрузок, приложенных к панели, определяется как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное, и представляется в виде

$$A_0 = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x u + q_y \mathcal{G} + q_z w) dx dy - \int_{x_1}^{x_2} (S_2 u + T_2 \mathcal{G} + Q_2 w + M_2 \varphi_2) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} dx. \quad (4)$$

Аналогично, потенциальные энергии внешних краевых нагрузок, приложенных к торцам, соответственно,  $j$ -го поперечного стержня, определяются следующими выражениями (принимается, что к ребрам приложены только краевые нагрузки):

$$A_j = - \left( S_j u_j + T_j \mathcal{G}_j + Q_j w_j + M_j \varphi_j + M_{1j} \varphi_{zj} + M_{kpi} \varphi_{kpi} \right) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2}. \quad (5)$$

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий упругих деформаций панели и ребер, а также потенциальных

энергий всех внешних нагрузок:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{j=1}^{k_1} \Pi_j + A_0 + \sum_{j=1}^{k_1} A_j. \quad (6)$$

Кинетические энергии цилиндрической панели и ребер записывается в виде

$$K_0 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t_1} \right)^2 \right] d\xi d\theta, \quad (7)$$

$$K_j = \rho_j F_j \int_{y_1}^{y_2} \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\text{кр}j}}{F_j} \left( \frac{\partial \varphi_{\text{кр}j}}{\partial t} \right)^2 \right] dx. \quad (8)$$

Здесь  $t$  – временная координата,  $t_1 = \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}$ ,  $\rho_0, \rho_j$  –

соответственно, плотности материалов, из которых изготовлены панель,  $j$  – й поперечный стержень;  $E$  – модуль Юнга материала панели.

Кинетическая энергия ребристой панели

$$K = K_0 + \sum_{j=1}^{k_1} K_j. \quad (9)$$

Уравнения движения ребристой поврежденной панели, контактирующей со средой, получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0, \quad (10)$$

где  $W = \int_{t'}^{t''} \tilde{L} dt$  – действие по Гамильтону,  $\tilde{L} = K - \Pi$  – функция Лагранжа,  $t'$  и  $t''$  – заданные произвольные моменты времени.

Предположим, что интенсивность нагрузки, действующей на панели со стороны вязкоупругой среды, можно написать в следующем виде:

$$q_z = k_c w - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) w(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где  $\Gamma$  – ядро релаксации [3], а коэффициент  $k_c$  определяется зависимостью  $k_c = q_1 + q_0 \nabla^2$  (модель Пастернака), где  $\nabla^2$  – двумерный оператор Лапласа на поверхности контакта,  $w$  – прогиб панели,  $q_1, q_0$  – постоянные.

С учетом соотношений (1) перемещение стержней выражаем через

перемещение панели. Из условия (10) получаем систему алгебраических уравнений относительно искомых неизвестных.

На примере рассмотрим свободные колебания подкрепленной поперечными ребрами поврежденной цилиндрической панели, контактирующей с вязко-упругой средой. Считая, что края панели шарнирно оперты, при  $x = 0, l$   $N_x = 0$ ;  $M_x = 0$ ;  $w = 0$ ;  $\mathcal{G} = 0$ , неизвестные величины аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t), \\
 \mathcal{G} &= \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (\mathcal{G}_0 \cos \omega t + \mathcal{G}_1 \sin \omega t), \\
 w &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (w_0 \cos \omega t + w_1 \sin \omega t), \\
 N_x &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (N_{x0} \cos \omega t + N_{x1} \sin \omega t), \\
 N_y &= \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (N_{y0} \cos \omega t + N_{y1} \sin \omega t), \\
 N_{xy} &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (N_{xy0} \cos \omega t + N_{xy1} \sin \omega t), \\
 M_x &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{x0} \cos \omega t + M_{x1} \sin \omega t), \\
 M_y &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{y0} \cos \omega t + M_{y1} \sin \omega t), \\
 M_{xy} &= \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (M_{xy0} \cos \omega t + M_{xy1} \sin \omega t),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где  $k$  - число волн в окружном направлении,  $\omega$  - частота колебания искомых величин  $u, w, \mathcal{G}, N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ . Подставим аппроксимации (12) в функции Лагранжа  $\tilde{L}$  и учитывая, что

$x_1 = 0, x_2 = L, y_1 = 0, y_2 = \frac{\pi}{4}, t' = 0, t'' = \frac{2\pi}{\omega}$ , проинтегрируем по  $x, y$  и  $t$ .

Тогда получаем функцию от искомых величин  $u_m, w_m, \mathcal{G}_m, N_{xm}, N_{ym}, N_{xym}, M_{xm}, M_{ym}, M_{xym}$ . Стационарное значение полуженной функции определяется из следующей системы:

$$\begin{aligned}
& 1) \frac{\partial J}{\partial u_0} = 0; \quad 2) \frac{\partial J}{\partial u_1} = 0; \quad 3) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_0} = 0; \quad 4) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_1} = 0; \\
& 5) \frac{\partial J}{\partial w_0} = 0; \quad 6) \frac{\partial J}{\partial w_1} = 0; \quad 7) \frac{\partial J}{\partial N_{x0}} = 0; \quad 8) \frac{\partial J}{\partial N_{x1}} = 0; \\
& 9) \frac{\partial J}{\partial N_{y0}} = 0; \quad 10) \frac{\partial J}{\partial N_{y1}} = 0; \quad 11) \frac{\partial J}{\partial N_{xy0}} = 0; \quad 12) \frac{\partial J}{\partial N_{xy1}} = 0 \\
& 13) \frac{\partial J}{\partial M_{x0}} = 0; \quad 14) \frac{\partial J}{\partial M_{x1}} = 0; \quad 15) \frac{\partial J}{\partial M_{y0}} = 0; \\
& 16) \frac{\partial J}{\partial M_{y1}} = 0; \quad 17) \frac{\partial J}{\partial M_{xy0}} = 0; \quad 18) \frac{\partial J}{\partial M_{xy1}} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Приравнявая главный определитель названной системы нулю, получим частотные уравнения относительно  $\omega$ :

$$\det|a_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, 18). \tag{14}$$

Уравнение (14) реализовано численно при следующих исходных данных[8]:

Для среды были приняты:  $\tilde{q}/\tilde{q}_0 = 3$ ;  $\tilde{q}_0/E = 0,002$ . Кроме того,  $M(t - \tau) = \beta = const$ ;  $\Gamma(t) = Ae^{-\psi t}$  ( $\psi = 0,05$ ;  $A = 0,1615$ );  $m = 1$ ;

$$v = 0,3; \quad \rho_0 = 7,82 / \text{см}^3; \quad L_1 = 800 \text{мм}; \quad \frac{F_c}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1};$$

$$\frac{I_{kp.c}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \quad R = 160 \text{мм}; \quad |h_c| = 0,1375 \cdot 10^{-1} R;$$

$$\frac{I_{yc}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}; \quad h = 0,45 \text{мм};$$

$$f(t_k^+) = 0,5; \quad E = E_c = 6,67 \cdot 10^9 \text{н/м}^2.$$

Результаты счета представлены на рис.1 в виде зависимости

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(1-v^2)\rho_0 R^2 \omega^2}{E}} \quad \text{от числа } k_1 \text{ - количества поперечных ребер.}$$

Сплошная линия соответствует поврежденной, а пунктирная – неповрежденной панели. Из рис.1 видно, что с увеличением  $k_1$ ,  $\omega_1$  возрастает. Кроме того, с увеличением количества поперечных ребер собственные частоты колебаний рассмотренной системы также возрастают. Счет показывает, что учет вязкости материала среды и повреждаемости приво-

дит к снижению значения собственной частоты колебаний рассмотренной системы по сравнению с частотой той же системы, когда среда чисто упругая.

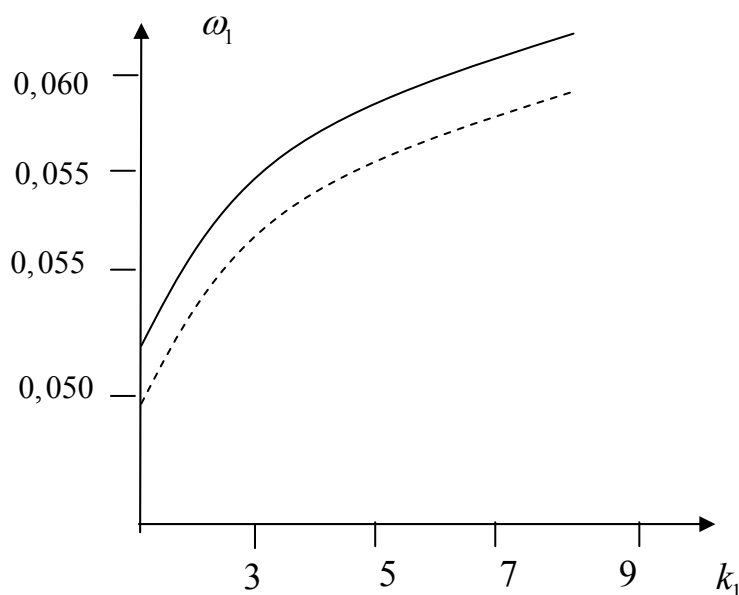


Рис. 1. Зависимость  $\omega_1$  от числа количество поперечных ребер  $k_1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Искендеров Р.А. Влияние начального прогиба на критические напряжения потери устойчивости ребристой цилиндрической оболочки, контактирующей со средой // «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій» Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, 2010, в. 14, с.183-190.
2. Искендеров Р.А. Устойчивость подкрепленной перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с заполнителем при действии различных нагрузок, изменяющихся во времени // Международный научно-технический журнал, Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. Минск, 2009, № 4 (9), с. 65-68.
3. Суворова Ю.В. О критерии прочности, основанном на накоплении поврежденности, и его приложение к композитам // Изв.АН СССР, МТТ, 1979, №4, с.108-111.
4. Ахундов М.Б., Гулиев Р.С. Распространение ударной волны в повреждающемся наследственно упругом цилиндрическом теле. // Тр. ИММ АН Азерб. 1997, т. 4-14, с. 208-212.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1974, 559 с.
6. Пирмамедов И.Т. Расчет параметрических колебаний поврежденного вязкоупругого стресса в вязкоупругой среде // Вторая Международная конференция «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела». Казань: Россия, 2009, с. 283 – 288.
7. İskenderov R.A. Buckling of the cylindrical shell reinforced by a cross system of ribs and filled with medium // Mechanics of composite materials. May 24-28, 2010, p.88-89.
8. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. Киев: Наукова думка, 1980, 367 с.

## ÖZLÜ-ELASTİKİ MÜHİTLƏ TƏMASDA OLAN ENİNƏ MÖHKƏMLƏNDİRİLMİŞ ZƏDƏLİ SİLİNDRİK TAVANIN RƏQSLƏRİ

R.Ə.İSKƏNDƏROV

### XÜLASƏ

Eninə qabırğalarla möhkəmləndirilmiş özlü-elastiki mühitlə təmasda olan zədəli silindrik tavanın sərbəst rəqslərinə baxılmışdır. Ostrogradski-Hamilton varyasiya prinsipinə əsasən hərəkətin diferensial tənliyi və qabırğalı silindrik tava üçün təbii sərhəd şərtləri alınmışdır. Göstərilmişdir ki, eninə qabırğaların sayının artması rəqsin məxsusi tezliyini artırır. Mühitin materialının özlülüyünün nəzərə alınması baxılan sistemin rəqslərinin məxsusi tezliyinin mühit tam elastik olan halda sistemin məxsusi tezliyindən az olmasına gətirir.

**Açar sözlər:** *zədəli örtük, böhran qüvvəsi, rəqslər, özlü-elastiki mühit, dayanıqlıq, Pasternak modeli.*

## VIBRATIONS OF DAMAGED CYLINDRICAL CROSS – STIFFENED PANEL IN CONTACT WITH VISCOELASTIC MEDIUM

R.A.ISKANDAROV

### SUMMARY

Free oscillations of visco-elastic medium-filled, damaged cylindrical panel strengthened by transverse ribs are considered. Differential motion equations and natural boundary conditions for a ribbed damaged cylindrical panel are obtained on the basis of Ostrogradskiy-Hamilton variational principle. It is shown, that eigen- frequencies of oscillations increase due to the amount of transverse ribs. Account of viscosity of medium material causes the reduction in the value of eigen- frequency of the oscillations of the considered system in comparison with the frequency of the same system when the medium is purely elastic.

**Key words:** *damaged shell, critical load, vibrations, viscous-elastic medium, stability, Pasternak's model.*

*Поступила в редакцию 06.12.2010 г.*

*Принято к печати 10.03.2011 г.*